Charakter wie bei einem typisch quantenmechanischen Problem.

Hier müssen wir noch die Verwandtschaft zwischen den Transformationen (13) und (28) genauer beschreiben. Sicher kann man nicht davon sprechen, daß die Transformation (28) im Limes $Z \to \infty$ die stochastische Transformation (13) gleichmäßig gut approximiere. Denn es gibt immer Komponenten der Verteilung, für die die Relaxationszeiten mit den Schwingungsdauern vergleichbar werden. Aber es gibt weite Bereiche, in denen die Approximation sehr gut ist. Dazu gehören selbstverständlich die Verteilungen mit nicht zu großem $K$, das sind bei großen Werten $Z$ noch durchaus respektable Werte, z. B. $K = Z^{1/2}$. Aber auch die Verteilungen, die bereits abgeklungen sind, können nicht zu Fehlern beitragen. Somit bleiben als Punkte, die merkliche Abweichungen ergeben können, nur diejenigen übrig, die in dem Grenzgebiet zwischen den bereits abgeklungenen und den sehr langlebigen Zuständen liegen. Wir werden an anderer Stelle zeigen, daß deren Frequenzen immer noch so groß sein können, daß sie sich dem Zugriff des Experimentators entziehen.

## 4. Zusammenfassung

Wir haben gezeigt, daß stochastische Prozesse im allgemeinen Gleichungen für gedämpfte Schwingungen gekoppelter Oszillatoren genügen. Die Dämpfung kann für die praktisch vorkommenden Verteilungen so klein sein, daß wir von ihr absehen dürfen. In diesem Fall ergeben sich stochastische Gleichungen vom Oszillationstyp, dem wir sonst nur in der Quantenmechanik begegnen.

# Quantenmechanische und stochastische Prozesse

Von Fritz Bopp

Aus dem Institut für Theoretische Physik der Universität München

(Z. Naturforschg. **10 a**, 789—793 [1955]; eingegangen am 27. Juli 1955)

Es wird gezeigt, daß es zu jedem quantenmechanischen Prozeß einen gewöhnlichen stochastischen Prozeß gibt, der zwar nicht mit jenem identisch ist, der sich aber von ihm in allen experimentell erreichbaren Bereichen nur unmerklich unterscheidet. Es ist also praktisch nicht möglich, experimentell zwischen einem in Strenge Quantengesetzen folgenden Prozeß und dem zugeordneten stochastischen Prozeß zu unterscheiden.

Wir betrachten eine Gibbssche Gesamtheit von Einzelteilchen in einem aus Z-Zellen bestehenden zyklischen Raum [1]. In der Quantenmechanik wird eine solche Gesamtheit durch die statistische Matrix $P$ beschrieben [2]. Sie genügt der v. Neumannschen Gleichung

$$i \dot{P} = H P - P H \tag{1}$$

in der $H$ der Hamilton-Operator ist.

Hier wollen wir den quantenmechanischen Prozeß mit einem gewöhnlichen stochastischen Prozeß vergleichen. Dazu ist es zweckmäßig, die Quantenmechanik in vergleichbarer Form zu schreiben, also als ein System von Gleichungen für Wahrscheinlichkeiten. Wie kürzlich gezeigt [3], eignen sich dazu die folgenden Observabeln:

$$F_{mn} = a\,(\tilde{F}_m F_n + F_n \tilde{F}_m) + c\,(\tilde{F}_m + F_n)\,. \tag{2}$$

Darin definieren die Matrizen [4]

$$(F_n)_{\mu\nu} = \delta(n-\mu)\,\delta(n-\nu) \text{ gemäß} \quad w_n = \mathrm{Spur}\,(P F_n) \tag{3}$$

die Ortswahrscheinlichkeiten und

$$(\tilde{F}_m)_{\mu\nu} = \frac{1}{Z}\,\varepsilon^{-m(\mu-\nu)} \text{ gemäß} \quad \tilde{w}_m = \mathrm{Spur}\,(P \tilde{F}_m) \tag{4}$$

die Impulswahrscheinlichkeiten. Die Konstanten $a$ und $c$ berechnen sich aus $Z$ gemäß:

$$a = 1/2\,(\sqrt{Z}+1)\,, \quad c = 1/2\sqrt{Z}\,(\sqrt{Z}+1)\,. \tag{5}$$

Die Matrizen $Z F_{mn}$ sind idempotent und haben die Spur 1, so daß ihre Mittelwerte

$$W_{mn} = \mathrm{Spur}\,(P F_{mn}) \tag{6}$$

wesentlich positiv sind. Auch sind alle kleiner als

[1] Betr. Wahl des Raums s. F. Bopp „Eine Art Phasenraum-Darstellung der Quantenmechanik", Z. Physik, im Druck.

[2] J. v. Neumann, Math. Grundl. d. Quantenmechanik, hier Kap. IV, s. auch l.c. [1], Anm. 1.

[3] l.c. [1], Gl. (44).

[4] $\varepsilon = \exp(2\,\pi\,i/Z)$.

oder gleich 1, da

$$\sum_{mn} W_{mn} = 1 \quad \text{ist wegen} \quad \sum_{mn} F_{mn} = 1 \,. \tag{7}$$

Die Größen $W_{mn}$ haben also den Charakter von Wahrscheinlichkeiten, die von den Nummern $n$ und $m$ der Orts- und Impulszellen abhängen. Für sie gelten folgende Gleichungen:

$$\dot{W}_{mn} = \sum_{rs} A_{mnrs} W_{rs} \,, \tag{8}$$

deren Koeffizienten sich aus dem Kommutator

$$i\,[H, F_{mn}] = \sum_{rs} A_{mnrs} F_{rs} \tag{9}$$

ableiten.

Die Gln. (8) sind mit stochastischen Gleichungen verwandt. Doch unterscheiden sie sich von den gewöhnlichen stochastischen Gleichungen darin, daß es keine abklingenden Vorgänge gibt. Mathematisch sind sie darum denen für ein System ungedämpfter gekoppelter Oszillatoren äquivalent, während die meistens studierten stochastischen Probleme aperiodischen Charakter haben.

Aber diese letzte Eigenschaft ist nicht wesentlich. Es gibt auch stochastische Prozesse, die mit Oszillationen verbunden sind. Nur sind die Oszillationen immer gedämpft. Wir haben bei stochastischen Problemen im allgemeinen Gleichungssysteme für gedämpfte gekoppelte Oszillatoren. Hier erhebt sich die Frage, ob es stochastische Probleme gibt, bei denen die Dämpfung so schwach ist, daß man in erster Näherung von ihr absehen kann. Das ist tatsächlich der Fall, wie ein sehr einfaches Beispiel zeigt[5], welches wir kürzlich untersucht haben.

In dieser Arbeit behandeln wir die umgekehrte Frage: Ist es möglich, dem Gleichungssystem (8) für ungedämpfte Oszillationen ein gewöhnliches stochastisches Gleichungssystem zuzuordnen, dessen Dämpfung in allen mit der Erfahrung vergleichbaren Fällen vernachlässigt werden kann?

Die Formeln (8) und (9) sind einer früheren[1] Arbeit entnommen. Für die Koeffizienten $A_{mnrs}$ in Gl. (8) kann man einen allgemeinen Ausdruck angeben, wenn man die Eigenwerte $\Omega_p$ und die Eigenvektoren $\Phi_p$ des Hamilton-Operators kennt. Sei[6]

$$H = \sum_{p} \Omega_p (\Phi_p ; \Phi_p{}^{\dagger}) \,, \tag{10}$$

so folgt aus Gl. (9) nach Linksmultiplikation mit $\Phi_p{}^{\dagger}$ und Rechtsmultiplikation mit $\Phi_q$ mit Rücksicht auf die Gleichungen

$$H\,\Phi_p = \Omega_p\,\Phi_p \,, \quad \Phi_p{}^{\dagger} H = \Omega_p\,\Phi^{\dagger} \,, \tag{11}$$

wenn wir noch die Abkürzungen

$$\Phi_{pq}(m\,n) = \Phi_p{}^{\dagger}\; F_{mn}\; \Phi_q \tag{12}$$

einführen:

$$i(\Omega_p - \Omega_q)\;\Phi_{pq}(m\,n) = \sum_{r's'} A_{mnr's'}\;\Phi_{pq}(r'\,s') \,. \tag{13}$$

Hiernach sind die Ausdrücke $\Phi_{pq}(r\,s)$ Eigenvektoren der Matrix $A$, im allgemeinen aber keine orthogonalen, weil die Matrix nicht antimetrisch zu sein braucht.

Wir führen darum explizit die zu $\Phi_{pq}(r\,s)$ reziproken Eigenvektoren durch die Gleichungen[7]

$$\overline{\Phi}_{pq}(r\,s) = \Phi_q{}^{\dagger}\; \overline{F}_{rs}\; \Phi_p \tag{14}$$

ein. Für sie gilt per definitionem:

$$\sum_{rs} \overline{\Phi}_{pq}(r\,s)\;\Phi_{p'q'}(r\,s) = \delta(p-p')\;\delta(q-q') \,. \tag{15}$$

Daraus folgt:

$$\sum_{rsp'q'} \overline{\Phi}_{pq}(r\,s)\;\Phi_{p'q'}(r\,s)\;\overline{\Phi}_{p'q'}(m\,n) = \overline{\Phi}_{pq}(m\,n) \,,$$

d. i. nach Gl. (12) und (14)

$$\sum_{rs} \mathrm{Spur}\,(F_{rs}\,\overline{F}_{mn})\;\overline{\Phi}_{pq}(r\,s) = \overline{\Phi}_{pq}(m\,n) \,,$$

woraus sich die Gleichungen ergeben

$$\mathrm{Spur}\,(F_{rs}\,\overline{F}_{mn}) = \delta(m-r)\;\delta(n-s) \,, \tag{16}$$

die wegen der linearen Unabhängigkeit der $F_{rs}$ stets eine Lösung haben.

Multiplizieren wir Gl. (13) mit $\overline{\Phi}_{pq}(r\,s)$ und summieren wir über $p$ und $q$, so ergeben sich für die Elemente der Matrix folgende Gleichungen:

$$A_{mnrs} = i \sum_{pq} (\Omega_p - \Omega_q)\;\Phi_{pq}(m\,n)\;\overline{\Phi}_{pq}(r\,s) \,. \tag{17}$$

Gemäß unserem Programm ersetzen wir sie durch andere Gleichungen, die für nicht zu große Frequenzen nicht merklich davon verschieden sind:

$$A_{mnrs} = -\frac{1}{\tau} \sum_{pq} \left(1 - e^{i\tau(\Omega_p - \Omega_q)}\right)\;\Phi_{pq}(m\,n)\;\overline{\Phi}_{pq}(r\,s) \,. \tag{18}$$

Wir werden zeigen, daß sie u. U. die Elemente einer gewöhnlichen stochastischen Matrix definieren.

[5] F. Bopp, Z. Naturforschg. **10a**, 783 [1955]; voranstehende Arbeit.

[6] Mit $(\mathfrak{A};\mathfrak{B})$ bezeichnen wir das dyadische Produkt der Vektoren $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$, also den Tensor mit den Komponenten $A_\mu B_\nu$.

[7] Man beachte die Indexfolge in (12) und (14).

Zunächst sieht man sofort, daß die Abweichungen von der Quantenmechanik beliebig klein gehalten werden können, wenn nur $\tau$ entsprechend klein gewählt wird. Da die Energie durch $\hbar\,\Omega$ und die Abklingkonstante durch $\tau\,\Omega^2/2$ gegeben ist, bleibt die Dämpfung in Zeitspannen $T$ und für Energieintervalle $E = \mathfrak{E}\, m\, c^2$ unmerklich, solange die dimensionslose Konstante

$$\gamma = \frac{\tau\, m\, c^2}{\hbar} \ll \frac{2}{\mathfrak{E}^2} \cdot \frac{\hbar}{T\, m\, c^2} \quad (m = \text{Masse des Elektrons}) \tag{19}$$

ist. Setzen wir $E = 10^{18}\, m\, c^2$ und $T = 10^{18}$ sec, so erhalten wir als obere Grenze für

$$\gamma = \left(\frac{\tau\, m\, c^2}{\hbar}\right)_{\max} = 10^{-75}.$$

Für Werte von $\gamma$, die mit dem Quadrat des reziproken Werts der berühmten kosmologischen Konstanten vergleichbar sind, ergibt sich also, daß sich durch den Übergang von Gl. (17) zu Gl. (18) praktisch nichts ändert. Selbst für kosmologische Zeiten und für Energiewerte, die die äußersten in der kosmischen Strahlung noch vorkommenden Werte übersteigen, braucht also der Unterschied zwischen den Gln. (17) und (18) nicht merklich zu sein. Nur dies sollen die Zahlen zeigen. In Wirklichkeit kann die Konstante $\gamma$ noch viel kleiner sein, sogar gleich 0, u. U. aber auch merklich größer, ohne ernsthaft mit der Erfahrung in Konflikt zu kommen. Auf keinen Fall soll diese Abschätzung einen Beitrag liefern zu Spekulationen über die kosmologische Konstante.

Wir müssen noch die Behauptung beweisen, daß Gl. (18) die Elemente einer gewöhnlichen stochastischen Matrix liefert, d. h. wir müssen zeigen, daß folgende Bedingungen gelten: Erstens die Gleichungen

$$\sum_{mn} A_{mnrs} = 0 \quad \text{und} \quad \sum_{rs} A_{mnrs} = 0\,, \tag{20}$$

die besagen, daß $\sum_{mn} W_{mn} = 1$ ein Integral der stochastischen Gleichungen ist und daß die Gleichverteilung eine stabile Lösung darstellt; zweitens die Ungleichungen

$$A_{mnrs} \geqq 0 \quad \text{für} \quad (m, n) \neq (r, s), \tag{21}$$

die sich aus der Forderung ergeben, daß beliebige positive Wahrscheinlichkeiten stets positiv bleiben müssen.

Zunächst beweisen wir die Gl. (20). Die erste folgt unmittelbar aus (18), wenn wir die Gln. (7) und (12) benutzen. Die zweite ergibt sich, wenn wir in (15) $p' = q'$ setzen und über $q'$ summieren. Wir erhalten:

$$\sum_{rs} \overline{\Phi}_{pq}(r\,s) \cdot \frac{1}{Z} = \delta(p-q),$$

woraus nach (10) die gesuchte Gleichung sofort folgt.

Die nichtdiagonalen Elemente der Matrix $A$ in Gl. (18) lauten:

$$A_{mnrs} = \frac{1}{\tau} \sum_{pq} e^{i\tau(\Omega_p - \Omega_q)}\, \Phi_{pq}(m\,n)\, \overline{\Phi}_{pq}(r\,s). \tag{22}$$

Mit der unitären Matrix

$$\sum_p e^{i\tau\,\Omega_p}(\Phi_p;\, \Phi_p^{\dagger}) = U \tag{23}$$

kann man dafür schreiben:

$$A_{mnrs} = \frac{1}{\tau} \operatorname{Spur}(U\, F_{mn}\, U^{\dagger}\, \overline{F}_{rs}). \tag{24}$$

Sicher gibt es Matrizen $U$, für die im Falle

$$(m, n) \neq (r, s)$$

die Ungleichungen $A_{mnrs} \geqq 0$ gelten; z. B. liefert

$$U = T_{m'n'} = \widetilde{T}^{m'}\, T^{n'} \tag{25}$$

mit $T$ und $\widetilde{T}$ (l. c. [1], s. Gl. (37) ff.) die Koeffizienten

$$\begin{aligned} A_{mnrs} &= \frac{1}{\tau} \operatorname{Spur}(F_{m-m';\, n-n'}\, \overline{F}_{rs}) \\ &= \frac{1}{\tau}\, \delta(m - m' - r)\, \delta(n - n' - s). \end{aligned}$$

Sie sind nur dann von 0 verschieden und gleich $1/\tau > 0$, wenn $m - r = m' \neq 0$, $n - s = n' \neq 0$ ist. Ebenfalls stochastisch sind die Koeffizienten, wenn wir die zu den verschiedenen Transformationen $T_{m'n'}$ gehörigen mit positiven Koeffizienten linear kombinieren. Sie lauten, wenn wir die Diagonalglieder mit einbeziehen:

$$\begin{aligned} A_{mnrs} = &-\sum_{m'n'} c_{m'n'} \\ &\cdot \left(\delta(m-r)\, \delta(n-s) - \operatorname{Spur}(T_{m'n'}\, F_{mn}\, T^{\dagger}_{m'n'}\, \overline{F}_{rs})\right), \\ &c_{m'n'} \geqq 0\,. \end{aligned} \tag{26}$$

Damit können wir u. U. einer quantenmechanischen Gleichung eine stochastische zuordnen, indem wir von der stochastischen Gl. (8) mit der neuen Matrix (18) zur statistischen Matrix $P$ zurückkehren. Multiplikation von Gl. (18) mit $W_{rs}$ und Summation über $r\,s$ ergibt mit Rücksicht auf die Gleichung

$$P = \sum_{rs} W_{rs}\, \overline{F}_{rs}\,, \tag{27}$$

welche aus (6) und (16) folgt:

$$\dot{W}_{mn} = -\frac{1}{\tau}\,\mathrm{Spur}(F_{mn}, P - U^\dagger P\, U).$$

Darin ist von Gl. (25) Gebrauch gemacht. Nach Gl. (6) können wir dafür schreiben:

$$\mathrm{Spur}(P + \frac{1}{\tau}(P - U^\dagger P\, U), F_{mn}) = 0\,.$$

Da die $F_{mn}$ alle voneinander linear unabhängig sind, muß der Ausdruck vor dem Komma gleich 0 sein. An Stelle von Gl. (17) erhalten wir also

$$\dot{P} = -\frac{1}{\tau}(P - U^\dagger P\, U). \tag{28}$$

Entsprechend folgt aus Gl. (26)

$$\dot{P} = -\sum_{m'n'} c_{m'n'}(P - T^\dagger_{m'n'} P\, T_{m'n'}), \quad c_{m'n'} \geqq 0\,. \tag{28 a}$$

Bei hinreichend feiner Zelleneinteilung sind im allgemeinen die Matrizen $T_{m'n'}$, für die die Gewichte $c_{m'n'}$ merklich von 0 verschieden sind, nahezu gleich 1. Wir können

$$T_{m'n'} = e^{i\,H_{m'n'}} \approx 1 + i\,H_{m'n'}\,, \quad H^\dagger_{m'n'} = H_{m'n'} \tag{29}$$

setzen und nach $H_{m'n'}$ bis zu linearen Gliedern entwickeln. In diesem Fall ergibt sich die Grundgleichung (1) der Quantenmechanik mit

$$H = \sum c_{m'n'}\, H_{m'n'}\,. \tag{29 a}$$

Auch das Umgekehrte ist möglich. Jede stochastische Gleichung im Phasenraum läßt sich auf obige Form bringen, und sie stimmt, wenn die Abklingkonstanten hinreichend klein sind, beinahe mit einer quantenmechanischen überein. Um das zu zeigen, gehen wir von der Gleichung aus:

$$A_{mnrs} = +\sum_{kl} c_{kl}\,\mathrm{Spur}(U_{kl}\, F_{mn}\, U^\dagger_{kl}\, \overline{F}_{rs}) - c\,\delta(m-r)\,\delta(n-s), \quad c = \sum_{kl} c_{kl}\,, \tag{30}$$

in der nicht die Matrizen $U_{kl}$ gegeben seien, sondern die stochastische Matrix $A_{mnrs}$. Mit Gl. (16) folgt daraus unmittelbar:

$$c\,F_{mn} + \sum_{rs} A_{mnrs}\, F_{rs} = \sum_{kl} c_{kl}\, U_{kl}\, F_{mn}\, U^\dagger_{kl}\,.$$

Wir fragen, ob sich daraus die Matrizen $U_{kl}$ berechnen lassen.

In Komponenten geschrieben lautet diese Matrixgleichung:

$$c\,F_{mn}(\mu\,\nu) + \sum_{rs} A_{mnrs}\, F_{rs}(\mu\,\nu) = \sum_{kl\lambda\lambda'} c_{kl}\, U_{kl}(\mu\,\lambda)\; F_{mn}(\lambda\,\lambda')\; U^\dagger_{kl}(\nu\,\lambda')\,.$$

Aus Gl. (16) folgt:

$$\sum_{\mu\nu} F_{mn}(\mu\,\nu)\;\overline{F}^*_{rs}\;(\mu\,\nu) = \delta(m-r)\;\delta(n-s)\,,$$
$$\sum_{mn} F_{mn}(\mu\,\nu)\;\overline{F}^*_{mn}(\varrho\,\sigma) = \delta(\mu-\varrho)\;\delta(\nu-\sigma)\,.$$

Danach ergibt die Multiplikation der vorangehenden Gleichung mit $\overline{F}^*_{mn}(\varrho\,\sigma)$ und Summation über $m, n$:

$$c\,\delta(\mu-\varrho)\;\delta(\nu-\sigma) + \sum_{mnrs} A_{mnrs}\,\overline{F}^*_{mn}(\varrho\,\sigma)\; F_{rs}(\mu\,\nu) = \sum_{kl} c_{kl}\, U_{kl}(\mu\,\varrho)\; U^*_{kl}(\nu\,\sigma)\,. \tag{30 a}$$

Fassen wir die linke Seite als eine Matrix auf mit den linken und rechten Indizes $(\mu, \varrho)$ und $(\nu, \sigma)$, so ist diese Matrix hermitesch und die rechte Seite stellt die Entwicklung dieser Matrix nach den Eigenvektoren $U_{kl}$ und den Eigenwerten $c_{kl}$ dar. Danach sind die $U_{kl}$ im allgemeinen nicht unitär. Es gelten aber die Orthogonalitätsrelationen

$$\sum_{\mu\nu} U^*_{kl}(\mu\nu)\; U_{k'l'}(\mu\,\nu) = \delta(k-k')\;\delta(l-l')\,. \tag{31}$$

Wir schreiben für Gl. (30 a) besser:

$$\sum_{mnrs} A_{mnrs}\,\overline{F}^*_{mn}(\varrho\,\sigma)\; F_{rs}(\mu\,\nu) = \sum_{kl} \Lambda_{kl}\, U_{kl}(\mu\,\varrho)\; U^*_{kl}(\nu\,\sigma)\,. \tag{32}$$

Darin ist

$$\Lambda_{kl} = c_{kl} - \sum_{kl} c_{kl}, \quad c_{kl} = \Lambda_{kl} - \frac{\sum_{kl} \Lambda_{kl}}{Z-1}\,. \tag{32 a}$$

Zur Quantenmechanik gelangen wir über Gl. (28a), die nunmehr folgende Form annimmt:

$$\dot{P} = -\sum_{kl} c_{kl}(P - U^\dagger_{kl}\, P\, U_{kl})\,. \tag{33}$$

Wenn in allen Gliedern, die merklich von 0 verschiedene Gewichte $c_{kl}$ haben,

$$U_{kl} \approx 1 + i\,H_{kl}\,, \quad H^\dagger_{kl} = H_{kl}\,, \tag{33 a}$$

ist, gilt Gl. (1), und die Hamilton-Funktion lautet:

$$H = \sum_{kl} c_{kl}\, H_{kl}\,. \tag{34}$$

Hier ist vorausgesetzt, daß die Abweichungen von 1 klein sind und daß Abweichungen vom unitären Charakter erst in Gliedern höherer Ordnung merklich werden. Das besagt, daß die Dämpfungskonstanten klein gegen die Frequenzen sein müssen. Ob das zutrifft, kann nur im Einzelfall entschieden werden. Nach Gl. (29) ist zu erwarten, daß die Kleinheit von $H_{kl}$ gegeben ist, wenn die Zelleneinteilung hinreichend fein ist. Die Forderung der Unitarität bis zu Gliedern erster Ordnung trifft unter allen möglichen stochastischen Prozessen eine Auswahl.

Eine im gesamten Bereich der experimentell *nachprüfbaren* Aussagen der Quantenmechanik geringfügige Modifikation führt also zu einer stochastisch unproblematischen Darstellung. Man kann sich fragen, ob eine solche Abänderung physikalisch sinnvoll ist. Denn solange $\gamma = \tau\, m\, c^2/\hbar$ extrem klein ist, gibt es keine Versuche, die für oder gegen die Abänderung sprechen könnten. Aber selbst unter dem Gesichtspunkt der Einfachheit kann man kaum die Quantenmechanik vorziehen. Zwei Fragen erscheinen dabei in einem neuen Lichte. Die erste gehört zum Bereich der Quantenphilosophie: Kann man die Folgerung noch aufrecht erhalten, Wellen und Teilchen der Quantenmechanik seien nicht objektivierbar, wenn es eine quantitativ sehr benachbarte Theorie gibt, in der das Realitätsproblem der Erkenntnistheorie keine andere Rolle spielt wie in der Makrophysik?

Die zweite Frage gehört der Quantenfeldtheorie an. Wie klein auch die Abweichungen sind, die Gültigkeit der gegenwärtigen Quantenmechanik nach großen Energiewerten hin. Von selbst stellt sich hier eine Abschneidevorschrift ein. Es ist darum zu erwarten, daß sich das Singularitätsproblem in einer neuen Form stellt.

Wir begnügen uns damit, diese Fragen zu formulieren. Erst weitere Untersuchungen werden zeigen können, wie die Antworten aussehen werden.

Hier können wir noch zwei einfachere Fragen bewältigen. Die erste lautet: Gewöhnliche stochastische Gleichungen ergeben keine Unschärferelation. Darum ist eine genaue Ortung im Phasenraum möglich. Wie verträgt sich das mit der oben festgestellten Güte der Approximation?

Gl. (18) läßt sofort erkennen, daß zur genauen Festlegung der Orte extreme Energiewerte gehören. Für diese gilt nicht mehr, daß die Abklingkonstanten vernachlässigbar seien. Vielmehr werden sich in extrem kurzer Zeit Verteilungen einstellen, die weniger scharf sind, und sie werden schließlich mit der Unschärferelation in Einklang kommen [9].

Hiergegen läßt sich einwenden: Neben den äußerst starken Dämpfungen wird es auch mittelstarke geben, die zu Verteilungen führen, welche immer noch zu scharf sind und welche doch eine merkliche Relaxationszeit haben. Ohne weitere Rechnungen ist es schwer zu sagen, wie stark diese ins Gewicht fallen können. Doch zeigt die oben angegebene Abschätzung, daß auch die längerlebigen antiheisenbergschen Zustände der Gesamtheit außerhalb der gegenwärtig zugänglichen Energiebereiche liegen.

Die zweite Frage lautet: Wie kann eine stochastische Gleichung gewöhnlicher Art die Welleneigenschaften der Teilchen beschreiben? Die Antwort ergibt sich hier ganz unzweifelhaft aus der Feststellung: Die stochastischen Gleichungen, die mit denen der Quantenmechanik konkurrieren können, sind solche für gedämpfte gekoppelte Oszillatoren, in denen die Dämpfung für die meisten Frequenzen in den Hintergrund tritt und zwar sicher in sehr viel stärkerem Maße als z. B. bei Schallwellen. Fast ungedämpfte Koppelschwingungen von Oszillatorsystemen mit vielen Freiheitsgraden, das ist gerade das, was wir vor Augen haben müssen, wenn wir ohne Mystik von Wellen reden wollen. Hier sind die Oszillatoren ebenso wie in dem früher untersuchten Spielbrettbeispiel [10] statistische Gesamtheiten.

Die oben unbeantwortete Frage nach den philosophischen Grundlagen der Quantenmechanik erscheint hiernach in neuer Gestalt: Gibt es einen Grund, Unschärferelation und Wellenausbreitung in der Quantenmechanik anders zu deuten als bei dem quantitativ so benachbarten stochastischen Prozeß gewöhnlicher Art?

[9] l.c. [5], Ziff. 3.

[10] l.c. [5], Gl. (19).